

INTRODUÇÃO À LÓGICA

A lógica é a ciência do raciocínio.

A lógica se dedica ao estudo dos conceitos de prova e verdade. Um dos objetivos da lógica é determinar se a argumentação utilizada por alguém para se chegar a uma certa conclusão é válida ou não. A lógica tem sido utilizada em todas as áreas da ciência: exatas, biológicas e humanas. É de uso comum por parte do matemático, do cientista da computação, do engenheiro, do advogado, do biólogo, do historiador, etc...

LÓGICA CLÁSSICA

Existem vários tipos (especialidades) de lógica: a bifurcação fundamental consiste na divisão entre lógicas clássicas e não clássicas. As lógicas clássicas (bivalentes) são baseadas em dois princípios:

Princípio do "terceiro excluído": uma sentença ou é verdadeira ou é falsa.

Princípio da não contradição: uma sentença não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

LÓGICA E LINGUAGEM

Nem toda sentença da língua portuguesa pode ser atribuída um valor verdade, V ou F, como por exemplo, as sentenças interrogativas (Para onde você vai?), as sentenças imperativas (Faça os exercícios.) e as exclamativas (Que belo!), não são em geral consideradas como sentenças lógicas. Por outro lado, as sentenças declarativas, isto é, sentenças que emitem um juízo (e portanto, as quais podem ser atribuída um valor verdade), são reconhecidas como sentenças lógicas e, formam junto com os conectivos lógicos, o "Cálculo de Proposições", uma linguagem para o raciocínio lógico.

MÉTODO AXIOMÁTICO

A obra de Euclides, que viveu por volta de 300a.C., sobre geometria fundou as bases para o que hoje se conhece como método axiomático para elaboração de teorias matemáticas: a partir de alguns conceitos primitivos (ponto, reta, plano, ângulo, etc...) e de alguns axiomas (proposições não demonstradas sobre os conceitos primitivos, como por exemplo, o quarto axioma de Euclides: "por um ponto fora de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta"), vão se estabelecendo definições e teoremas (proposições sobre as definições), em um grau de dificuldade crescente. A abordagem de Euclides é um marco histórico na matemática. Apesar de muitos dos resultados de Euclides serem conhecidos por outros povos anteriores à sua época, como por exemplo, os egípcios, que tinham acumulado um grande conhecimento sobre geometria que lhes era útil na agricultura e na astronomia, diferentemente dos egípcios, Euclides não apenas reuniu uma extensa coleção de resultados em sua obra, ele estruturou esses resultados de modo lógico, demonstrando que alguns resultados são conseqüências lógicas de outros.

HISTÓRICO

Usualmente, se estabelece um marco para a origem da lógica com os gregos, cerca de 500 anos antes de Cristo, devido ao extenso registro sobre o assunto deixado pelos mesmos. Por mais de mil anos, de 400dc até 1600dc, poucas contribuições foram acrescentadas a lógica neste período, assim como aconteceu com quase todas as ciências. No século XIX, foram feitas contribuições relevantes para a lógica, destacando-se George Boole (1815-1864), Augustus de Morgan (1806-

1871) e Gottlob Frege (1848-1925). Estas contribuições permitiram a apresentação da lógica proposicional de modo axiomático, a lógica passando a se constituir uma teoria formal.

Lógica e Matemática: o sucesso destas novas formulações para a lógica, teve repercussões em outras áreas da matemática. No fim do século XIX e início do século XX, houve um movimento sem precedentes para formalizar ainda mais as teorias matemáticas, como por exemplo, a geometria e a teoria dos números. Os matemáticos queriam ter certeza que suas teorias estavam estruturadas em bases sólidas. Por exemplo, se a noção de números reais não pudesse ser formalizada de modo consistente, que dizer então do cálculo diferencial e integral?

OUTRAS APLICAÇÕES

A lógica é aplicada em diversas áreas onde as variáveis são bivalentes.

Lógica e aritmética na base dois (binária): na base dois, os dígitos possíveis são 0 ou 1. A soma de dois bits (dígitos binários) pode ser formulada através de duas expressões lógicas. Isto permite que as operações da aritmética possam ser realizadas através de circuitos digitais.

Lógica e Circuitos Digitais: por exemplo, na *eletrônica*, um interruptor tem dois estados possíveis: ligado ou (exclusivo) desligado. A álgebra dos interruptores (circuitos digitais) pode ser formulada através da lógica, assim como expressões lógicas podem ser representadas por circuitos.

Lógica e Inteligência Artificial: o método dedutivo é um dos fundamentos dos sistemas especialistas, sistemas inteligentes dotados de uma base de conhecimento e de um método dedutivo que permite tirar conclusões a partir de alguns dados. Sistemas deste tipo tem sido utilizados em diversas áreas como por exemplo, no auxílio a diagnósticos médicos, e na agricultura.

EXERCÍCIOS

1. Para quais sentenças abaixo é possível atribuir um valor verdade, V ou F?
 - a. Existe vida em outro planeta.
 - b. Vá estudar.
 - c. Ele é honesto.
 - d. Agora não está chovendo.
 - e. Vamos ao cinema?
2. Teste seu conhecimento. As questões abaixo tem um valor verdade definido de acordo com a área do conhecimento a que se referem. Responda qual é o valor verdade de cada alternativa.
 - a. O número 143 é primo.
 - b. Para todo número real positivo, $x^2 \geq x$.
 - c. Na base dois, $101 + 110 = 1011$.
 - d. Para que um corpo se mantenha em movimento, deve existir uma força atuando sobre ele.
 - e. Todo triângulo inscrito em uma semi-circunferência, com um lado igual ao diâmetro, é retângulo.
 - f. Se um número é divisível por 3 então ele é divisível por 9.
3. Lógicas Não Clássicas. O estudo de lógicas não clássicas é motivado por sistemas para os quais podem ser importantes atribuir mais do que dois valores. Um exemplo clássico é o da máquina de lavar roupas. A maioria das máquinas atuais têm usualmente dois estados: vazio ou cheio, conforme a máquina está sendo usada ou não. Se for necessário lavar alguma roupa, deve-se encher a máquina de água, independente da quantidade de roupa que será lavada. Este certamente, não é um sistema inteligente. Seria mais adequado uma máquina que ajustasse o volume de água para a quantidade de roupa a ser lavada. Elabore outros exemplos do cotidiano para os quais seria conveniente considerar outros estados, além de Cheio/Vazio, Sim/Não, Ligado/Desligado, etc...

Lógica para Concursos

Considere um concurso cuja prova é constituída de questões de múltipla escolha, cada questão tendo quatro alternativas. A chance de uma pessoa acertar uma questão "no chute", isto é, escolhendo aleatoriamente uma alternativa, é de 25%. Entretanto, se a comissão que elaborou a prova não tiver cuidado e o candidato agir de modo lógico, em algumas questões esta chance pode aumentar, pois algumas alternativas podem ser eliminadas.

Para as questões abaixo, verifique se alguma alternativa pode ser excluída apenas utilizando o raciocínio lógico, sem necessidade de conhecimento específico sobre a questão.

Questão 1. Marque a alternativa correta. De acordo com as leis da Atlântida (um país imaginário)

- a. Uma empresa não pode empregar menores de dezoito anos.
- b. Menores de dezoito anos podem se casar sem autorização dos pais.
- c. Menores de dezoito anos não podem votar.
- d. Uma empresa pode empregar menores de dezoito anos.

Questão 2. Marque a alternativa falsa. De acordo com os cientistas do planeta Logus

- a. A velocidade da luz depende da região do espaço em que ela está viajando.
- b. A luz das estrelas é branca.
- c. A trajetória da luz se curva ao passar em regiões de gravidade elevada.
- d. A luz das estrelas é amarela.

Atividade em sala: leia o problema, discuta a formulação e a resolução do problema com o grupo e descreva (redação) seu raciocínio.

Reflexão posterior: analise a possibilidade de trabalhar problemas deste tipo em sala de aula.

Atividades opcionais (em casa):

- (i) Caso a questão 2 acima fosse "Marque a alternativa correta", sua análise ainda seria válida?
- (ii) Procure em provas de concurso, por exemplo, no ENEM, no SARESP ou no vestibular, para ver se você encontra questões que permitem este tipo de análise ou similares.
- (iii) Elabore pelo menos duas estratégias que permitam analisar as alternativas de modo lógico e eventualmente eliminar da resposta algumas alternativas.

Raciocínio Lógico. Problemas e Desafios.

1. [Smullyan] Um senhor tem um cavalo de uma única cor. Este senhor tem três amigos, João, Pedro e Roberto, que não conhecem a cor do cavalo. Os amigos decidem tentar adivinhar a cor do cavalo. Para facilitar, o senhor diz que a cor do cavalo ou é branca, ou marrom ou cinza. João diz que o cavalo é branco. Pedro diz que ou o cavalo é branco ou é marrom. Roberto diz que o cavalo não é cinza. Após ouvir as tentativas dos amigos, o senhor diz que dois deles estão correto e um está errado. Determine a cor do cavalo.

2. [Mortari] Os brincos das Princesas. Um rei tem três filhas: Ana, Júlia e Tatiana, todas inteligentes. Para decidir qual delas vai herdar o reino, o rei faz um desafio para elas. O rei dispõe de cinco pares de brincos, sendo 3 pares de esmeralda (verde) e 2 pares de rubi (vermelho). As princesas terão os olhos vendados e será colocado um par de brincos em cada uma. A primeira princesa que disser com certeza qual a pedra (cor) do seu brinco herdará o trono, desde que justifique qual o raciocínio utilizado para chegar a esta conclusão. A princesa que quiser tentar, terá os olhos desvendados podendo ver os brincos que as irmãs estão usando mas não podendo ver o brinco que usa (a sala não tem espelhos). Quem errar será retirada da sala. Ana é a primeira a tentar, mas após ver os brincos das irmãs conclui que não tem certeza sobre qual brinco que está usando e portanto é retirada da sala. Júlia é a próxima a tentar, mas também após ver o brinco de Tatiana conclui que não tem certeza sobre qual brinco que está usando e também é retirada da sala. Antes que tirassem a venda dos olhos de Tatiana ela responde corretamente qual o brinco que está usando e descreve seu raciocínio para o pai, herdando assim o trono. Qual a pedra (cor) do brinco de Tatiana. Justifique seu raciocínio.

3. Os Porteiros do Céu e do Inferno. Após a morte, um senhor foi deixado em um local onde havia duas entradas: uma para o céu e outra para o inferno. Cada entrada tinha um porteiro. As entradas e os porteiros não podem ser distinguidas visualmente. Para decidir qual das entradas escolher, este senhor pode fazer uma única pergunta a um dos porteiros. A pergunta deve se referir ao céu ou ao inferno, ou aos próprios porteiros. Ele havia sido informado de que o porteiro do inferno sempre mentia, e o porteiro do céu sempre dizia a verdade. Determine qual das perguntas abaixo permite a este senhor decidir com certeza sobre qual é a entrada do céu.

- a. Esta é a entrada do céu?
- b. Você diz a verdade?
- c. O outro porteiro diz a verdade?
- d. Se você fosse o outro porteiro, você diria que esta é a entrada do céu?

Raciocínio Lógico. Problemas e Desafios II. Modelagem Matemática.

1. [Elon] Um garoto deseja cozinhar um ovo em 15 minutos, entretanto ele não dispõe de um relógio, e sim de duas ampulhetas. Uma das ampulhetas marca um intervalo de tempo de 7 minutos e a outra marca 11 minutos. Como o garoto poderá ter certeza de cozinhar o ovo em 15 minutos usando apenas as duas ampulhetas?
2. [Concurso] Uma bomba de vácuo retira metade do ar de um recipiente fechado a cada bombada. Sabendo que após 5 bombadas foram retirados 62 centímetros cúbicos de ar, calcule a quantidade de ar que permanece no recipiente após essas bombadas.
3. Ao morrer um senhor deixou uma herança no valor de R\$90.000,00 para três herdeiros: a esposa e dois filhos. Um juiz decidiu que a herança deve ser repartida da seguinte maneira: a viúva deve receber metade do total, e a outra metade deve ser repartida igualmente entre a viúva e os dois filhos. Quanto deve receber cada herdeiro?
4. Três sócios abrem uma farmácia. O capital investido por José é quatro terços do que Roberto investiu e o capital investido por Carlos é dois terços do que José investiu. Se o investimento total foi de R\$58.000,00, calcule quanto cada sócio investiu na farmácia.
5. [Adaptado de Malba Tahan] Problema dos marinheiros. O comandante de um navio quer recompensar dois bravos marinheiros. Assim, entregou ao secretário uma caixa contendo entre duzentas e quarenta e duzentos e cinqüenta moedas, para que, no dia seguinte, fossem distribuídas igualmente entre os dois marinheiros. Entretanto, ao anoitecer um dos marinheiros, sem nada dizer ao companheiro, foi sorrateiramente até onde se achava a caixa com moedas e dividiu-a em duas partes iguais, entretanto a divisão não era exata e sobrava uma moeda. “Por causa desta moedinha é capaz de haver discussão amanhã, o melhor é jogá-la fora”, pensou o marinheiro e assim o fez, levando a sua parte e deixando o restante no mesmo lugar. Horas depois, o segundo marinheiro teve a mesma idéia. Foi até o lugar onde se encontrava a caixa de moedas, dividiu o total em duas partes iguais, observando que sobrava uma moeda, resolveu atirá-la ao mar, levando a sua parte. No dia seguinte, o secretário reuniu os dois marinheiros para cumprir a ordem do comandante. Abriu a caixa de moedas, dividiu-a em duas partes iguais, dando a cada um dos marinheiros uma parte. Observando que sobrava uma moeda na caixa, guardou-a para si como pagamento pelo serviço prestado. Nenhum marinheiro reclamou, pois cada um achava que já havia retirado a parte que lhe cabia.
 - (i) Quantas eram as moedas na caixa?
 - (ii) Quanto recebeu cada um dos marinheiros?

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE LÓGICA

Apostila: Introdução à lógica.

1. As sentenças das alternativas a e d podem ser atribuídas um valor verdade. A sentença da alternativa c também pode, desde que se conheça sobre quem se está falando.
2. a. Falso, $143 = 11 \times 13$. b. Falso, $x = \frac{1}{2}$ é um contraexemplo. c. Verdade.
d. Falso. e. Verdade. f. Falso, $x = 6$ é um contraexemplo.

Lógica para Concursos

Questão 1: as alternativas A e D são *contraditórias*, uma é a negação da outra. Assim, uma delas deve ser verdade. Portanto, as alternativas B e C podem ser descartadas.

Questão 2: as alternativas B e D são *inconsistentes*, ambas não podem ser verdade. Assim, uma delas deve ser falsa. Portanto, as alternativas A e C podem ser descartadas.

Raciocínio Lógico. Problemas e Desafios I.

Estes problemas são resolvidos por exaustão, considerando-se todas as possibilidades.

1. A cor do cavalo é marrom.
Análise: vamos analisar a possibilidade de cada amigo estar certo ou não.
Se João estiver certo, Pedro e Roberto também estarão certos mas, isto contradiz o que o dono do cavalo afirmou (que apenas 2 estavam corretos). Como João está errado, o cavalo não é branco.
Se Pedro estiver certo então, Roberto também estará certo e como já vimos que João está errado, isto é coerente com o que o dono afirmou. Assim, Pedro está certo e como Pedro disse que o cavalo é branco ou marrom, a cor do cavalo deve ser marrom.
2. O brinco de Tatiana é de esmeralda.
Análise: o que Ana pode ter visto? Se suas irmãs estivessem ambas com brincos de rubi, então Ana teria certeza que o seu brinco é de esmeralda. Assim, suas irmãs devem estar ambas com brincos de esmeralda ou uma com esmeralda e a outra com rubi.
O que Júlia pode ter visto? Se Tatiana estivesse usando rubi, Júlia saberia que seu brinco é de esmeralda, pois caso contrário Ana teria ganho o desafio. Assim, o brinco de Tatiana é de esmeralda.
3. A alternativa D.
Análise: deve ser uma pergunta para a qual os porteiros tenham respostas diferentes.
Para a pergunta da alternativa D, a resposta do porteiro do céu é “não”, enquanto a resposta do porteiro do inferno é “sim”. Para as perguntas das alternativas A, B e C ambos os porteiros dariam a mesma resposta, “sim” para A e B e “não” para C.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE LÓGICA

Problemas e Desafios II. Modelagem Matemática.

- O garoto deve proceder da seguinte maneira: vire as duas ampulhetas juntas e quando esgotar a ampulheta de 7 minutos, comece a cozinhar o ovo marcando o tempo na ampulheta de 11 minutos. Observe que faltam apenas 4 minutos para esgotar esta ampulheta. Quando a ampulheta de 11 minutos esgotar, vire-a de novo, reiniciando a marcação do tempo. Quando esta ampulheta se esgotar novamente, o ovo estará cozido.
- Volume de ar que permanece no recipiente é igual a 2cm^3 .
Análise: o volume de ar que permanece é igual ao volume inicial, V , menos o volume retirado. O volume retirado a cada bombada é descrito na tabela abaixo

Bombada	1ª.	2ª.	3ª.	4ª.	5ª.
Volume Retirado	$V/2$	$V/4$	$V/8$	$V/16$	$V/32$

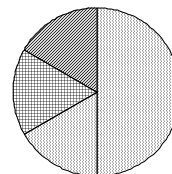
Assim, o volume inicial, V , pode ser calculado da equação
 $V/2 + V/4 + V/8 + V/16 + V/32 = 62\text{cm}^3$, obtendo $V = 64\text{cm}^3$.

- Viúva deve receber $x = \text{R}\$60.000,00$ e cada filho $y = \text{R}\$15.000,00$.

Análise (frações):

metade da herança = $1/2$ de $90 = 45$.

um terço da metade = $1/3$ de $45 = 15$.



- Roberto deve receber $x = \text{R}\$18.000,00$, José $y = \text{R}\$24.000,00$, e Carlos $z = \text{R}\$16.000,00$.

Análise por equação em uma variável: seja x o capital investido por Roberto.

capital investido por José = $4/3 x$.

capital investido por Carlos = $(2/3) \cdot (4/3) \cdot x = 8/9 x$.

Total investido pelos sócios: $x + 4/3 x + 8/9 x = 58.000$.

Análise por sistema de equações: o problema pode ser modelado pelas seguintes relações

$$x + y + z = 58.000, \quad y = 4/3 x, \quad z = 2/3 y.$$

- Análise por sistema de equações:

Definição das variáveis

t = total de moedas na caixa,

x = moedas que o 1º. Marinheiro retirou de noite,

y = moedas que o 2º. Marinheiro retirou de noite,

s = moedas distribuídas a cada marinheiro pelo secretário.

Relações entre as variáveis: $t = 2x + 1$, $x = 2y + 1$, $y = 2s + 1$.

Usando as equações para eliminar as variáveis x e y , obtém-se uma relação entre t e s

$$t = 8s + 7.$$

Do enunciado do problema, sabemos que $240 \leq t \leq 250$. Assim, temos que $s = 30$ e $t = 247$.

Também, das equações acima obtemos $x = 123$ e $y = 61$. Finalmente,

total de moedas que o 1º. Marinheiro recebeu = $x + s = 123 + 30 = 153$,

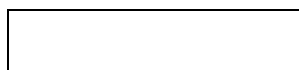
total de moedas que o 2º. Marinheiro recebeu = $y + s = 61 + 30 = 91$.

Observação: a soma das moedas que cada marinheiro recebeu é igual ao total de moedas menos 3 (2 jogadas fora mais 1 que ficou com o secretário).

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE LÓGICA

Problemas e Desafios II. Modelagem Matemática. Resoluções Alternativas.

4. Resolução por frações: represente o capital de Roberto por um retângulo.



Capital de Roberto

Como o capital de José é $\frac{4}{3}$ do de Roberto, vamos dividir o capital de Roberto em 3.



Capital de Roberto.



Capital de José.

O capital de Carlos é $\frac{2}{3}$ do capital de José. Agora, no desenho acima o capital de José é composto de 4 retângulos. Dividindo cada retângulo em 3, como no desenho abaixo, pode-se obter o capital de Carlos



Capital de José.



Capital de Carlos.

Do desenho acima, o capital de José corresponde a 12 retângulos menores, o de Carlos a 8 e o de Roberto a 9 (cada retângulo maior equivale a 3 retângulos menores). Assim, o total de retângulos menores é 29 e corresponde a 58 mil reais (o capital total dos 3 sócios). Portanto, cada retângulo menor corresponde a 2 mil reais. Finalmente,

$$\text{capital de José} = 12 \text{ retângulos menores} = 12 \times 2 = 24 \text{ (mil reais).}$$

$$\text{capital de Carlos} = 8 \text{ retângulos menores} = 8 \times 2 = 16 \text{ (mil reais).}$$

$$\text{capital de Roberto} = 9 \text{ retângulos menores} = 9 \times 2 = 18 \text{ (mil reais).}$$

5. Resolução por exaustão.

Seja t o total de moedas na caixa. Foi dado no problema que $240 \leq t \leq 250$.

Quando o 1º. marinheiro dividiu t por 2 o resto foi 1, portanto t deve ser ímpar. Assim, as possibilidades se reduzem a $t = 241, 243, 245, 247$ ou 249 .

Após o furto do 1º. marinheiro, o total de moedas na caixa foi reduzido a “metade”, os valores possíveis são $x = 120, 121, 122, 123$ ou 124 .

Pelo mesmo raciocínio, quando o 2º. marinheiro dividiu por 2 o total de moedas que havia na caixa (naquele momento) o resto foi 1, portanto aquele total deve ser ímpar. Assim, as possibilidades se reduzem a $x = 121$ ou 123 .

Após o furto do 2º. marinheiro, o total de moedas na caixa foi novamente reduzido a “metade”, os valores possíveis sendo $y = 60$ ou 61 .

Finalmente, pelo mesmo raciocínio, quando o secretário dividiu por 2 o total de moedas que havia na caixa (naquele momento) o resto foi 1, portanto a única possibilidade é $y = 61$. Este valor corresponde a $x = 123$ e $t = 247$.

O total de moedas distribuído pelo secretário para cada marinheiro é $s = 30$.

$$\text{Total de moedas que o 1º. Marinheiro recebeu} = x + s = 123 + 30 = 153,$$

$$\text{Total de moedas que o 2º. Marinheiro recebeu} = y + s = 61 + 30 = 91.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DIVERTIMENTOS LÓGICOS

- BERLOQUINI, P., *100 Jogos Lógicos*, editora Gradiva, 1998.
- LIMA, Elon Lages, *Meu Professor de Matemática e Outras Estórias*, SBM, 1999.
- SMULLYAN, Raymond, *O Enigma de Sherazade*, Zahar Editor, 1998.
- SMULLYAN, Raymond, *Alice no País dos Enigmas*, Zahar Editor, 2001.
- STEWART, Ian, *Mania de Matemática*, Zahar Editor, 2000.
- TAHAN, Malba, *O Homem que calculava*, 20ª. edição, editora Conquista, 1961.
- Revista Galileu, *edição especial sobre matemática*, editora Globo, abril 2003.
- Revista Coquetel, *Desafios de Lógica*.

MODELAGEM MATEMÁTICA

- BASSANEZI, R. C., *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto, 2002.
- LIMA, Elon L. et al., *Temas e Problemas*, SBM, 2003.
- POLYA, G., *A arte de resolver problemas*, editora Interciência, 1978.

LÓGICA FORMAL

- CASTRUCCI, Benedito, *Introdução à Lógica Matemática*, editora Nobel, 1984.
- MORTARI, Cezar A., *Introdução à Lógica*, editora UNESP, 2001.
- NOLT, John e ROHATIN, Dennis, *Lógica*, editora Mc-GrawHill (Makron do Brasil), Coleção Schaum, ano 1991.
- DAGHLIAN, Jacob, *Lógica e Álgebra de Boole*, editora Atlas, 1995.
- HEGENBERG, Leônidas, *Lógica, Simbolização e Dedução*, editora EDUSP, 1975.

LÓGICA E OUTRAS CIÊNCIAS

- ALVES, Alaôr C., *Lógica: Pensamento Formal e Argumentação, Elementos para o Discurso Jurídico*, editora Edipro, 2000.
- BARKER, Stephen F., *Filosofia da Matemática*, editora Zahar, 1976.
- ILARI, Rodolfo, *Introdução ao Léxico*, editora Contexto, 2000.
- ILARI, Rodolfo, *Introdução à Semântica*, editora Contexto, 2002.
- TAHAN, Malba, *A Lógica na Matemática*, editora Saraiva, 1966.