Noções de Matemática Financeira

Maria Emília Pereira

e-mail m-emilia-pereira@bol.com.br

Escola Estadual "Gabriel Prestes"

Lorena – SP

Dezembro de 2006.

Publico Alvo : 3ª Série do Ensino Médio
Duração do Projeto : 14 aulas

Projeto Teia do Saber 2006 – Programa de Formação Continuada de Professores.
Diretoria de Ensino da Região de Guaratinguetá.
Secretaria de Estado da Educação – SP.
Metodologias de Ensino de Disciplinas da Área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio: Matemática I (curso inicial).
Coordenador: Prof. Dr. José Ricardo de Rezende Zeni.
Departamento de Matemática (DMA).
UNESP – Faculdade de Engenharia (FEG) – Campus de Guaratinguetá
Homepage do curso: http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/index.php

Introdução

A escola sem dúvida, ocupa um lugar de destaque na vida do jovem; como ponto de encontro, espaço de socialização e também um lugar onde eles vão poder "ser alguém" na vida.

A escola também é um espaço para discussão de temas relativos ao cotidiano do aluno, competências e habilidades que lhe sirvam para uma inserção futura no mercado de trabalho.

O professor tem que organizar novas maneiras de compreender as necessidades dos alunos e de responder a seus interesses e expectativas.

Reencontrar um sentido para a escola. Os alunos não encontram sentido naquilo que estudam, não faz uma ponte entre o que aprende e sua vida.

O professor tem que inserir novas metodologias em suas aulas, dar ao aluno a oportunidade de se expressar para que ele possa ser protagonista de sua história de vida. Articular meios para que o aluno busque conhecimento através de pesquisa, encontre seu eu, para que o mesmo possa se inserir na sociedade, dando sua contribuição social, intelectual e construindo assim um futuro promissor para todos.

A matemática no Ensino Médio contribui para estruturar o pensamento e o raciocínio, contribui para ajudar a resolver situações das mais variadas atividades humanas e para ajudar o jovem a desenvolver uma atividade profissional.

A matemática financeira é um dos ramos da Matemática que ajuda leigos e economistas a estudar e analisar formas mais adequadas de alcançar seus objetivos no campo econômico e no campo pessoal.

O estudo das questões de natureza econômica não é recente. Os antigos gregos já se preocupavam com esse assunto e fizeram importantes contribuições. No entanto, o nascimento da economia como corpo teórico de estudo, independentemente da política e da filosofia, ocorreu em 1776, quando Adam Smith publicou a obra: Uma investigação sobre a natureza e as causas da riqueza das nações.

Objetivos:

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc...).
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Recorrer a cálculos com porcentagens para avaliar a adequação de propostas de intervenção na realidade.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Calculando a inflação por meio do custo da cesta básica

Você certamente já ouviu falar em inflação. Esse termo em Economia é utilizado para descrever uma diminuição do valor do dinheiro em relação à quantidade de bens e serviços que se pode comprar com esse dinheiro. Em outras palavras a inflação é a contínua e persistente alta dos preços.

Mas nem todos os preços e salários aumentam da mesma forma. E esse é um dos principais problemas provocados pela inflação, pois o crescimento diferenciado dos custos, beneficia alguns e prejudica outros.

Mede-se a inflação por meio de índices que tentam refletir o aumento de preços de um setor em particular ou de um segmento de consumidores. Os índices de preços ao consumidor tentam medir a inflação média de um conjunto de produtos e serviços que se pressupõe ser este o adquirido por um cidadão com determinadas características de renda.

Para você compreender o processo de obtenção de índices de inflação pelos economistas, vamos admitir que esse cidadão e sua família consomem, em média os produtos e quantidades relacionados na tabela abaixo. A tabela a seguir indica os preços dos produtos, que compõem a "cesta" da família em questão, levantados no mês referência (mês 0) e no mês seguinte (mês 1).

Preencha os espaços em branco:

		Mês 0		**Mês 1**	
Produto	**Quantidade**	**Preço unitário (R$)**	**Subtotal (R$)**	**Preço unitário (R$)**	**Subtotal (R$)**
Arroz	15 Kg	1,10	16,50	1,20	
Feijão	8Kg	2,75	22,00	3,00	
Óleo	6 latas	2,20	13,20	3,50	
Pão	15Kg	4,00	60,00	4,30	
Leite	40 litros	1,15		1,25	
Carne	10 Kg	3,50		4,00	
Passagens	90	1,40		2,00	
Totais					

Agora responda às questões:

a) Qual o total gasto no mês 0? e qual o total gasto no mês 1?
b) Em relação ao mês 0, quanto se gastou a mais no mês 1?
c) Expresse essa diferença de gastos por meio de uma porcentagem.
d) Qual dos produtos da tabela sofreu o maior aumento?

O exemplo dado mostra que no mês 0 os consumidores necessitavam de um valor para adquirir sua "cesta", enquanto no mês 1 foi necessário um valor maior. A inflação do mês para essa família é medida pela taxa de aumento dos gastos de um mês para outro (quanto por cento se gastou a mais).

Nesse problema calculamos que o crescimento dos preços da cesta entre os meses 0 e 1 foi de 24,72%. Então, podemos dizer que, para essa família, a inflação foi de 24,72% .

Se a variação do índice calculado para correção dos salários tivesse sido de 20%, em lugar dos 24,72% que reflete o aumento de sua "cesta", isso significaria que ao final do mês 1 essa pessoa compraria menos do conjunto de produtos de sua "cesta".

Dessa situação, podemos concluir que a variação dos preços que é relevante para uma pessoa ou empresa não é necessariamente a mesma que foi calculada pelas instituições responsáveis. Isso significa que a seleção do índice mais apropriado par medir a inflação relevante para uma pessoa ou empresa é em si um problema complicado, pois os índices disponíveis não refletem necessariamente a real variação de preços para cada caso em particular.

Além disso, esses índices variam de acordo com a instituição que fez a pesquisa, pois para cada uma delas é considerada uma lista de produtos e serviços diferentes. Essas diferenças ilustram as dificuldades em se estabelecer um índice único de inflação para toda a economia.

Então, é possível entender porque há tanta discussão entre patrões e empregados quanto à questão dos índices de reajuste salarial, não é mesmo?

- Pesquise sobre quais são os elementos que compõem a cesta básica para medir a inflação do Brasil por alguma instituição de pesquisa.
- Anote os preços de alguns produtos em um supermercado e, uma semana depois, verifique se esses produtos aumentaram ou não de preços. Faça uma tabela e calcule a inflação da semana para aqueles produtos.
- Pesquise sobre o significado de deflação. A deflação é boa para a economia? Justifique sua resposta.

Analise a seguinte situação:

Neide tomou um empréstimo de R$ 2.000,00 em uma financeira e se comprometeu a pagar após 6 meses. A taxa de juros combinada foi de 8% ao mês. No final do prazo, porém, ocorreu um problema: o valor calculado por Neide não coincidia com aquele cobrado pela financeira.

Vejamos como cada um, Neide e o gerente, calculou o valor a ser pago:

Cálculo de Neide:

Em um mês: 8%

Em seis meses: 6 . 8% = 48%

2000 mais 48% de 2000 =

= 2000 + 0,48 . 2000 =

= 2000+ 960 = 2960

Total a pagar : R$ 2.960,00

Cálculo do gerente:

1º mês: 2000 + 0,08 . 2000 = 2000 + 160 = 2160

2º mês: 2160 + 0,08 . 2160 = 2160 + 172,80 = 2332,80

3º mês: 2332,80 + 0,08 . 2332,80 = 2332,80 + 186,62 = 2519,42

4º mês: 2519,42 + 0,08 . 2519,42 = 2519,42 + 201,55 = 2720,97

5º mês: 2720,97 + 0,08 . 2720,97 = 2720,97 + 217,68 = 2938,65

6º mês: 2938,65 + 0,08 . 2938,65 = 2938,65 + 235,09 = 3173,74

Total a pagar : R$ 3.173,74

Quem estava com a razão? Por que essa confusão aconteceu?

Há procedimentos matemáticos que permitem analisar essa situação e que se relacionam com um ramo da Matemática bastante utilizado no comércio, indústria e finanças: a **Matemática Financeira.**

Identificando dois tipos de juros

Para descobrir quem está certo precisamos analisar qual foi o critério usado nos cálculos de cada um.

Quando um capital é aplicado ou emprestado a uma determinada taxa, o montante pode crescer segundo dois diferentes critérios ou regimes: **de capitalização simples** ou de **capitalização composta**. Esses dois sistemas também são conhecidos como **Juros simples**, no primeiro caso, e **juros compostos**, no segundo.

Juros simples

No regime de juros simples, estes incidem sempre sobre o capital inicial. Na prática, esse sistema é usado especialmente em certos pagamentos cujo atraso é de apenas alguns dias.

Juros compostos

Nesse regime, após cada período, os juros são incorporados ao capital inicial, passando a render sobre o novo total. Dessa forma, os cálculos são efetuados como "juros sobre juros".

Observe que Neide fez os cálculos no regime de juros simples e o gerente calculou no regime de juros compostos. Esse foi o motivo da confusão.

A linguagem da Matemática financeira

O valor pedido por Neide à financeira, que foi R$ 2.000,00, é chamado de capital.

> **Capital:** em uma transação financeira, é o dinheiro emprestado, investido ou devido inicialmente. Representamos o capital por C.

Neide concordou em pagar à financeira juros à taxa de 8% ao mês.

> **Juro:** é o "aluguel" que se paga (ou se recebe) pelo dinheiro emprestado (ou aplicado). Representamos o juro por J.
> **Taxa de juro:** é a taxa, em porcentagem, que se paga ou se recebe pelo "aluguel" do dinheiro. Representamos a taxa por i.

A taxa de juro é sempre aplicada em relação a um intervalo de tempo, que pode ser em dias, meses ou anos. No exemplo dado, Neide tomou o empréstimo por 6 meses, prazo após o qual deveria devolver à financeira o valor emprestado mais o juro.

> **Prazo:** tempo que decorre desde o início até o final de uma operação financeira. Representamos esse intervalo de tempo por t.

O prazo e a taxa devem ter sempre a mesma unidade de medida de tempo. Assim, se a taxa for diária, o tempo será em dias; se a taxa for mensal, o tempo será em meses, e assim por diante.

O valor a ser pago por Neide no vencimento do prazo de empréstimo é o montante.

> **Montante:** soma do capital emprestado (ou investido) com o juro. Indicamos o montante por M.

Fórmula para calcular juros simples

De acordo com os cálculos de Neide, podemos montar a seguinte tabela. Preencha os espaços em branco:

Período	Capital inicial	Juros no período	Montante a ser pago
1º mês	2000	160 = 0,08 . 2000	M_1 = 2000 + 160 = 2160
2º mês	2000	320 = 2. 160	M_2 = 2000 + 320 = 2000 + 2 . 160 = 2320
3º mês	2000	480 = 3 . 160	M_3 = 2000 + 480 = 2000 + 3. 160 = 2480
4º mês			
5º mês			
6º mês			
tº mês tºmês	2000 ↓ C	J = 2000 . 0,08 . t ↓ ↓ ↓ ↓ j = C . i . t	M = 2000 + 2000 . 0,08 . t ↓ ↓ ↓ M = C + j

Assim, se um capital C, aplicado a uma taxa i ao período, no sistema de juros simples, rende juros j ao fim de um período t, então podemos dizer que: j = C . i . t e o montante a ser pago (ou recebido) após esse período é dado pelo capital mais o juro, ou seja M = C + j , mostre que o montante pode ser calculado pela fórmula: M = C(1 + it).
Resolução:
M = C + J → M = C + Cit → M = C(1 + it)

Fórmula para calcular juros compostos.

Analisando os cálculos feitos pelo gerente da financeira à qual Neide pediu o empréstimo, temos:
1º mês: 2000 + 0,08 . 2000 = 2000 + 160 = 2160
$M_1 = C + i \,.\, C$
$M_1 = C(1 + i)$
2º mês: 2160 + 0,08 . 2160 = 2160 + 172,80 = 2332,80
$M_2 = M_1 + i \,.\, M_1$
$M_2 = M_1 (1 + i)$
$M_2 = C(1+i)(1 + i)$
$M_2 = C(1+ i)^2$

3º mês: 2332,80 + 0,08 . 2332,80 = 2332,80 + 186,62 = 2519,42

$M_3 = M_2 + i . M_2$

$M_3 = M_2 (1 + i)$

$M_3 = C(1 + i)^2 . (1 + i)$

$M_3 = C(1 + i)^3$

Agora , calcule os montantes M_4, M_5 e M_6 referentes aos períodos 4 , 5 e 6.

Generalizando os resultados obtidos, você pode encontrar uma fórmula que permite calcular o montante M para um período t qualquer. Assim, o cálculo do montante será dado por:

$$\boxed{M = C(1+ i)^t},$$

onde C é o capital inicial, i é a taxa e t é o tempo de aplicação do capital.

Exercícios:

1) Carla pediu a uma amiga R$ 4.000,00 emprestados a serem pagos em 1 ano, a uma taxa de 5% ao mês. Qual o montante a ser pago se o regime for:

a) juros simples? b) juros compostos?

Resolução:

Observações: lembre que $i = 5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$ e que a taxa de juros é mensal e que o tempo a ser pago está em anos. Isso exige que façamos t = 1 ano = 12 meses, para que a taxa e tempo estejam na mesma unidade.

1° modo:

a) $M = C+ J$ $\quad j = C . i . t = 4000 . 0{,}05 . 12 = 2400$

Assim o montante será:

$M = 4000 + 2400 = 6400$

2º modo:

Usar a fórmula do montante para juros simples:

$M = C(1 + it) = 4000(1 + 0{,}05 . 12) = 4000(1+ 0{,}6) = 4000. 1{,}6 = 6400$

Resposta: se o regime for de juros simples o montante será de R$ 6400,00.

b) $M = C(1 + i)^t = 4000(1 + 0{,}05)^{12} = 4000 . 1{,}05^{12}$

Para obter $1{,}05^{12}$ você pode usar uma calculadora simples, digitando 1 . 0 5, depois a tecla $\boxed{x}$ e em seguida 11 vezes a tecla $\boxed{=}$.

Ou usar uma calculadora científica. Nesse caso, digite: 1 . 0 5 $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{x^y}$ 1 2 e a tecla $\boxed{=}$ em qualquer das formas você vai obter $1{,}05^{12} = 1{,}80$.

Com isso será possível calcular o montante:

$M = 4000 . 1{,}80 = 7200$

Resposta: se o regime for de juros compostos o montante será de R$ 7200,00.

2) Qual é o capital que, aplicado à taxa de 10% ao mês a juros compostos, produz um montante de R$79.860,00 após 3 meses?
Resolução:
$M = C\ (1 + i)^3 \rightarrow 79860 = C(1 + 0{,}10)^3 \rightarrow 79860 = C(1{,}10)^3 \rightarrow 79860 = C\ .\ 1{,}331$
$C = 79860 \div 1{,}331 \rightarrow C = 60000{,}00$

Resposta: o capital é de R$ 60.000,00.

3) (ENEM – 2005) Mário tomou um empréstimo de R$ 8.000,00 a juros de 5% ao mês. Dois meses depois, Mário pagou R$ 5.000,00 do empréstimo e, um mês após esse pagamento, liquidou todo o seu débito. Qual o valor do último pagamento?

Resolução:
Observação: todo empréstimo (de mercado) é calculado no regime de juros compostos.
1º mês: 8000 + 0,05 . 8000 = 8000 + 400 = 8400
2º mês: 8400 + 0,05 . 8400 = 8400 + 420 = 8820
8820 – 5000 = 3820
Último mês: 3820 + 0,05 . 3820 = 3820 + 191= 4011
Resposta: o último pagamento foi de: R$ 4.011,00.

As alternativas eram:
A) R$ 3.015,00 B) R$ 3.820,00 C) R$ 4.011,00 D) R$ 5.011,00 E) R$ 5.250,00

È importante na matemática financeira aplicar problemas que envolvem a porcentagem, como no exemplo abaixo.

4) (Unesp-SP) O preço de tabela de um determinado produto é R$ 1.000,00. O produto tem um desconto de 10% para pagamento à vista e um desconto de 7,2% para pagamento em 30 dias. Admitindo que o valor a ser desembolsado no pagamento à vista possa ser aplicado pelo comprador em uma aplicação de 30 dias, com um rendimento de 3%, determine:

a) quanto o comprador teria ao final da aplicação.
b) Qual é a opção mais vantajosa para o comprador, pagar à vista ou aplicar o dinheiro e pagar em 30 dias (justifique matematicamente sua resposta).

Resolução:
10% = 0,10 → 1.000 . 0,10 = 100,00
O pagamento à vista seria de 1.000 – 100 = 900,00
7,2% = 0,072 → 1.000 . 0,072 = 72,00
O pagamento em 30 dias seria de 1.000 – 72 = 928,00
3% = 0,03 → 900 . 0,03 = 27,00
A aplicação de 30 dias renderia : R$ 27,00.

Resposta a) Ao final da aplicação teria R$ 927,00.
.
Resposta b) Pagar à vista .

Logaritmo e a Matemática financeira

Uma equação é denominada de exponencial quando apresenta a incógnita no expoente. Há diversos tipos de equações exponenciais e para resolver algumas delas é preciso usar logaritmos. Como muitos problemas de juros compostos são resolvidos por meio de uma equação exponencial, você vai precisar do logaritmo para resolver essas situações.

Exemplo: Pedro Ivo aplicou R$ 5.000,00 em um tipo de aplicação que rendeu juros a uma taxa de 8% ao mês sob regime de capitalização composta. Se o montante foi de R$10.794,62, quanto tempo durou essa aplicação?
Resolução:

Para resolver esse problema basta substituir os valores conhecidos na fórmula

$$M = C(1 + i)^t$$

Lembrando que 8% = 0,08. Assim,

$10.794{,}62 = 5.000\,(1 + 0{,}08\,)^t$

$\frac{10.794{,}62}{5.000} = (1{,}08)^t$

$2{,}1589 = (1{,}08)^t$

Como então resolver essa equação exponencial $(1{,}08)^t = 2{,}1589$? Podemos usar a seguinte propriedade do logaritmo: se a = b então log a = log b. Dessa forma temos

$\log(1{,}08)^t = \log 2{,}1589$

Recorrendo a uma outra propriedade podemos escrever: $t.\log(1{,}08) = \log 2{,}1589$.

Assim, $t = \frac{\log(2{,}1589)}{\log(1{,}08)}$

Por meio de uma calculadora encontramos os valores dos logaritmos e determinamos o quociente:

$t = \frac{0{,}3342}{0{,}0334} \rightarrow t = 10$ meses.

Atividade:

Um capital de R$ 2.500,00 é aplicado a uma taxa mensal de 5% ao mês por um determinado período. Se os juros recebidos foram de R$ 538,77 por quanto tempo esse capital permaneceu empregado? Considere o regime de capitalização composta.
Resolução:

$M = C + j \rightarrow 2.500{,}00 + 538{,}77 = 3.038{,}77$

$M = C(1 + i)^t$

$3038{,}77 = 2500(1 + 0{,}05)^t \rightarrow \frac{3038{,}77}{2500} = (1{,}05)^t \rightarrow 1{,}2155 = (1{,}05)^t$

$\log(1{,}2155) = \log(1{,}05)^t \rightarrow \log(1{,}05)^t = \log(1{,}2155)$

$t\,.\,\log(1{,}05) = \log(1{,}2155) \rightarrow t = \frac{\log(1{,}2155)}{\log(1{,}05)} \rightarrow t = \frac{0{,}0845}{0{,}0211} = 4$ meses.

R. Este capital permaneceu empregado por 4 meses.

Metodologia

Antes de iniciar este projeto, foi proposto um acordo com os alunos, que seria um trabalho de final de bimestre ou seja do 4º bimestre. Teria que ser entregue a pesquisa e as atividades propostas.

As atividades propostas eram discutidas em grupo e, quando o grupo apresentava a solução e, esta estando correta explicavam aos demais, quando nenhum grupo conseguia encontrar a solução eu explicava e resolvia na lousa a questão.

Avaliação

A classe concordou com o projeto e se propôs a trabalhar para a conclusão do mesmo. Os alunos entenderam as atividades propostas, alguns alunos acharam a atividade proposta um pouco trabalhosa, mas não difícil.

A avaliação foi feita pela participação, como a maioria se envolveu e entregou a pesquisa, o objetivo do projeto foi alcançado e, o conceito foi satisfatório. Não consegui introduzir exercícios mais variados, porque perdi as aulas no dia 20 de novembro, mas a idéia, a definição e a aplicação de alguns conceitos foram concluídas.

Bibliografia

- Carolino Pires, Célia Maria. Construindo sempre Matemática – Interface com a Economia II. São Paulo, PROEM. 2002.
- Stocco Smole, Kátia e Ignez Diniz, Maria. Matemática do Ensino Médio, 3ª série, São Paulo, Saraiva. 2005.
- PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) Ensino Médio – Brasília 1999.
- EMR (Ensino Médio em Rede). Governo do Estado de São Paulo. 2004. VFI (Vivência Formativa I).

DEZEMBRO

Dezembro do começo e fim.
Fim de um ano, de uma etapa de um período.
Começo dos abraços, beijos, sorrisos,
perdão e reconciliação.
Dezembro de trocas;
presentes, carinho e desejos.
Dezembro do materialismo, da vida,
da família, da saudade e gratidão.
Dezembro da expectativa de um ano novo,
diferente, complassivo, renovado e pleno.
Dezembro que está intrínseco o belo e puro amor...
Dezembro de ida e vinda, que encerra um ciclo
para o início de um ano, à espera de um novo ser.